模块一 集合（★☆）

强化训练

1．（2022·河南宜阳月考·★）集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=\frac{16}{n},n\in\mathbf{N}\}$ 中的元素个数为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

答案：C

解析： 分析可知 A 中的元素 x 为自然数，且 $x=\frac{16}{n}(n\in\mathbf{N})$，故考虑哪些自然数 n 能使 $\frac{16}{n}$ 也为自然数即可，

当且仅当 n 取 1，2，4，8，16 这些自然数时，$\frac{16}{n}$ 才是自然数，所以集合 A 中有 5 个元素.

2．（2022·广州模拟·★）已知集合 $A=\{a-2,a^2+4a,12\}$，且 $-3\in A$，则 a 的值为（　　）

（A）-3 或 -1　（B）-1　（C）3　（D）-3

答案：D

解析： -3 这个元素在集合 A 中，故依次考虑 A 中的每一个待定元素为 -3，

因为 $-3\in A$，所以 $a-2=-3$ 或 $a^2+4a=-3$，解得：$a=-1$ 或 -3；

注意还需代回去检验集合 A 是否满足元素互异，

当 $a=-1$ 时，$a-2=a^2+4a=-3$，不满足元素互异，舍去；

当 $a=-3$ 时，$A=\{-5,-3,12\}$，满足题意；综上所述，a 的值为 -3.

3．（2022·山西忻州月考·★★）已知 $m\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{R}$，若集合 $\{m,\frac{n}{m},1\}=\{m^2,m+n,0\}$，则 $m^{2023}+n^{2023}=$（　　）

（A）-2　（B）-1　（C）1　（D）2

答案：B

解析： 两个集合中已经确定的元素分别是 1 和 0，其中 0 比较特殊，故分析在另一集合中谁是 0，

由题意，$0\in\{m,\frac{n}{m},1\}$，而 $m\neq 0$，所以 $\frac{n}{m}=0$，故 $n=0$，此时两个集合分别为 $\{m,0,1\}$，$\{m^2,m,0\}$，

对比可得 $m^2=1$，解得：$m=\pm 1$，还需检验是否满足元素互异，

经检验，当 $m=1$ 时，两个集合都不满足元素互异，所以 $m=-1$，故 $m^{2023}+n^{2023}=(-1)^{2023}+0^{2023}=-1$.

4．（2022·安徽模拟·★）已知集合 $A=\{1,2,m^2\}$，$B=\{1,m\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 m 的值为_____.

答案：2 或 0

解析： 因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，对比两集合的元素可得 $m=2$ 或 $m=m^2$，所以 $m=2$ 或 1 或 0，

还需检验是否满足元素互异，经检验，当 $m=1$ 时，A，B 都不满足元素互异；当 $m=2$ 或 0 时，满足题意.

【反思】 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

5.（2023 •河北衡水中学统考一模 •★）已知集合 $A=\{x\,|\,a<x<a+2\}$，$B=\{x\,|\,y=\ln(6+x-x^2)\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是（　　）

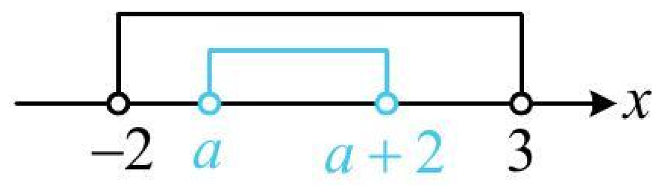
（A）$[-1,2]$　（B）$(-1,2)$　（C）$[-2,1]$　（D）$(-2,1)$

答案：C

解析：先分析集合 B，B 中的元素是 x，x 要能使 $y=\ln(6+x-x^2)$ 有意义，

由 $6+x-x^2>0$ 可得 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)<0$，解得：$-2<x<3$，所以 $B=\{x\,|\,-2<x<3\}$，

如图，因为 $A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}a\ge -2\\ a+2\le 3\end{cases}$，解得：$-2\le a\le 1$.



6.（2023 • 广州一模 • ★）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-2x-3<0\}$，则集合 A 的子集个数为（　　）

（A）3　（B）4　（C）8　（D）16

答案：C

解析：$x^2-2x-3<0\Leftrightarrow(x+1)(x-3)<0\Leftrightarrow-1<x<3$，又 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $A=\{0,1,2\}$，故 A 的子集个数为 $2^3=8$.

7.（2023 • 浙江模拟 • ★）已知集合 M 满足 $\{2,3\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，那么这样的集合 M 的个数为（　　）

（A）6　（B）7　（C）8　（D）9

答案：C

解析：分析发现 M 中必有元素 2，3，而元素 1，4，5 可有可无，所以我们从 1，4，5 中选出若干元素加入到 $\{2,3\}$ 中，得到的集合就是 M，故 M 的个数即为集合 $\{1,4,5\}$ 的子集个数，

集合 $\{1,4,5\}$ 有 3 个元素 ⇒ 其子集个数为 $2^3=8$，所以满足条件的集合 M 有 8 个.

8.（2023 • 山西模拟 • ★）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-x-6<0\}$，$B=\{y\,|\,y=x^2\}$，则 $A\cap B$ 的子集有（　　）

（A）2 个　（B）4 个　（C）8 个　（D）16 个

答案：C

解析：$x^2-x-6<0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)<0\Leftrightarrow-2<x<3$，结合 $x\in\mathbf{Z}$ 可得 $A=\{-1,0,1,2\}$；

集合 B 中的元素用 y 表示，在 $y=x^2$ 中 y 的取值范围即为集合 B，

$y=x^2\ge 0\Rightarrow B=\{y\,|\,y\ge 0\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，故 $A\cap B$ 的子集个数为 $2^3=8$.

9.（2023 • 江西模拟 • ★）已知集合 $A=\{-1,0\}$，$B=\{1,2\}$，则集合 $C=\{z\,|\,z=x^2+y^2,x\in A,y\in B\}$ 的真子集个数为（　　）

（A）3　（B）7　（C）15　（D）16

答案：C

解析：先分析集合 C，可将 x 和 y 所有可能的组合列表来看，

x	-1	-1	0	0
y	1	2	1	2

x^2+y^2	2	5	1	4

所以 $C=\{2,5,1,4\}$，C 中有 4 个元素 $\Rightarrow C$ 的真子集有 $2^4-1=15$ 个.

10.（2022 • 新高考Ⅱ卷 • ★）已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x||x-1|\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$\{-1,2\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{1,4\}$　　（D）$\{-1,4\}$

答案：B

解析：$|x-1|\le 1\Leftrightarrow -1\le x-1\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le 2$，所以 $B=\{x|0\le x\le 2\}$，又 $A=\{-1,1,2,4\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

11.（2021 • 全国乙卷 • ★）已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cap T=$（　　）

（A）$\varnothing$　　（B）S　　（C）T　　（D）$\mathbf{Z}$

答案：C

解法 1：若看不出两个集合的公共部分，可列出部分元素来找规律，

集合 S 中的元素为 $\cdots,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,\cdots$，集合 T 中的元素为 $\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots$，

对比可发现 T 中的元素 S 中全部都有，所以 $T\subseteq S$，故 $S\cap T=T$.

解法 2：也可通过推理来得出 $T\subseteq S$，把 T 中的元素化为 S 中元素的形式即可，

对任意的 $t\in T$，可设 $t=4m+1$，其中 $m\in\mathbf{Z}$，则 $t=2\times 2m+1$，

记 $2m=n$，于是 $t=2n+1$，由 $m\in\mathbf{Z}$ 可得 $n=2m\in\mathbf{Z}$，所以 $t\in S$，从而 $T\subseteq S$，故 $S\cap T=T$.

12.（2022 • 全国乙卷 • ★）设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则（　　）

（A）$2\in M$　　（B）$3\in M$　　（C）$4\notin M$　　（D）$5\notin M$

答案：A

解析：因为 $\complement_U M=\{1,3\}$，所以 $M=\complement_U(\complement_U M)=\{2,4,5\}$，故 $2\in M$.

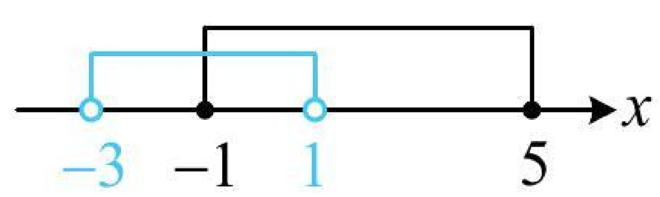
【反思】设 A 是全集 U 任意的一个子集，则 $A=\complement_U(\complement_U A)$.

13.（2022 •新疆乌鲁木齐二模 •★）已知集合 $M=\{x|x^2-4x-5\le 0\}$，$N=\{x|-3<x<1\}$，则 $M\cup N=$（　　）

（A）$(-3,5]$　　（B）$[-1,1)$　　（C）$(-3,-1]$　　（D）$(1,5]$

答案：A

解析：$x^2-4x-5\le 0\Leftrightarrow (x+1)(x-5)\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 5$，所以 $M=[-1,5]$，如图，$M\cup N=(-3,5]$.



14.（2023 •全国乙卷 •★）设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\ge 2\}=$（　　）

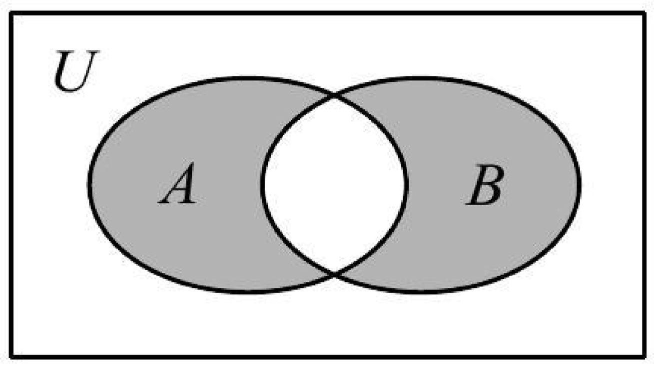
（A）$\complement_U(M\cup N)$　　（B）$N\cap\complement_U M$　　（C）$\complement_U(M\cap N)$　　（D）$M\cap\complement_U N$

答案：A

解析：正面求解不易，直接验证选项，A 项，由题意，$M\cup N=\{x|x<2\}$，所以 $\complement_U(M\cup N)=\{x|x\ge 2\}$，故选 A.

15.（2023 •江苏扬州期末 •★）集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{0,2,4\}$，则图中阴影部分所表示的集合为（　　）

（A）$\{0,2\}$　　（B）$\{-1,1,3,4\}$　　（C）$\{-1,0,2,4\}$　　（D）$\{-1,0,1,2,3,4\}$



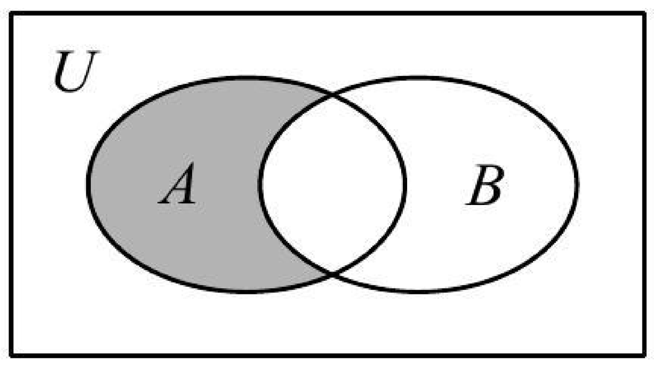
答案：B

解析：观察图形可得图中阴影部分表示在 $A\cup B$ 中把 $A\cap B$ 的部分去掉后余下的部分，

由题意，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{0,2\}$，所以阴影部分表示的集合为 $\{-1,1,3,4\}$.

16.（2023・全国模拟・★★）设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid -2\le x<7\}$，${}_U(A\cup B)=\{1,5,6\}$，$B=\{2,4\}$，则图中阴影部分表示的集合是（　　）

（A）$\{-2,-1,0,3\}$　　（B）$\{0,3\}$　　（C）$\{0,2,3,4\}$　　（D）$\{3\}$



答案：B

解析：由题意，$U=\{x\in\mathbf{N}\mid -2\le x<7\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，因为 ${}_U(A\cup B)=\{1,5,6\}$，所以 $A\cup B=\{0,2,3,4\}$，

接下来应先弄清楚阴影那块表示什么，阴影部分表示的是在 $A\cup B$ 中把 B 去掉，余下的部分，即 $\{0,3\}$.

17.（2023・江苏苏州模拟・★★）已知 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 A，集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid 1<ax<2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,1]$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

答案：B

解析：$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\le -1$ 或 $x\ge 1$，所以 $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，

再求 B，要解不等式 $1<ax<2$，只需同除以 a 即可，但需讨论 a 的正负，

当 $a=0$ 时，$\forall x\in\mathbf{R}$，$1<ax<2$ 都不成立，所以 $B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；

当 $a>0$ 时，由 $1<ax<2$ 可得 $\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$，所以 $B=(\frac{1}{a},\frac{2}{a})$，

注意到此时 $\frac{1}{a}>0$，从而 $B\subseteq A$ 的情况如图 1，故 $\frac{1}{a}\ge 1$，解得：$0<a\le 1$；

当 $a<0$ 时，由 $1<ax<2$ 可得 $\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}$，所以 $B=(\frac{2}{a},\frac{1}{a})$，

注意到此时 $\frac{1}{a}<0$，从而 $B\subseteq A$ 的情况如图 2，故 $\frac{1}{a}\le -1$，解得：$-1\le a<0$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-1,1]$.

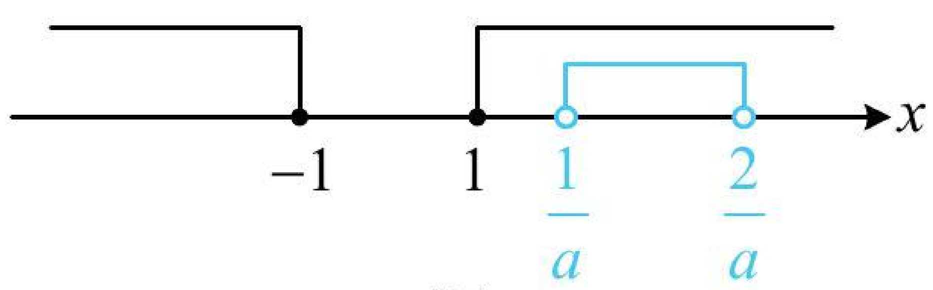


图1

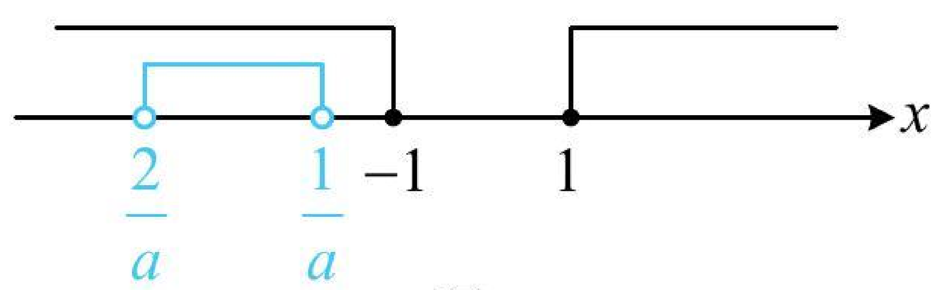


图2

18．（2023•江苏扬州期末•★★）已知集合 $A=\{x\,|\,\frac{4-x}{x+1}\ge 0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$\{1\}\cup(2,+\infty)$　　（C）$\{1\}\cup[2,+\infty)$　　（D）$[2,+\infty)$

答案：C

解析：$\frac{4-x}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}(4-x)(x+1)\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases}$，解得：$-1<x\le 4$，所以 $A=(-1,4]$；

对于集合 B 中的不等式，若将常数项 $2a(a^2+1)$ 拆成 $-2a$ 和 $-(a^2+1)$，即可产生 $-(a+1)^2$，故能分解因式，

$x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0\Leftrightarrow(x-2a)(x-a^2-1)<0$ ①，要解此不等式，需比较 $2a$ 和 a^2+1 的大小，

因为 $a^2+1-2a=(a-1)^2\ge 0$，所以 $a^2+1\ge 2a$，其中 $a^2+1=2a$ 和 $a^2+1>2a$ 对应①的解集不同，又得讨论，

当 $a=1$ 时，不等式①即为 $(x-2)^2<0$，无解，所以 $B=\varnothing$，满足 $A\cap B=\varnothing$；

当 $a\ne 1$ 时，由①可得 $2a<x<a^2+1$，所以 $B=(2a,a^2+1)$，要看 A 与 B 何时交集为空集，可画数轴分析，

如图，要使 $A\cap B=\varnothing$，注意到 $a^2+1>0>-1$，所以不会出现图 1 所示的情形，只可能是图 2 的情形，

且端点 $2a$ 与 4 可以重合，重合时端点处也不是公共元素，所以 $2a\ge 4$，解得：$a\ge 2$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{1\}\cup[2,+\infty)$.

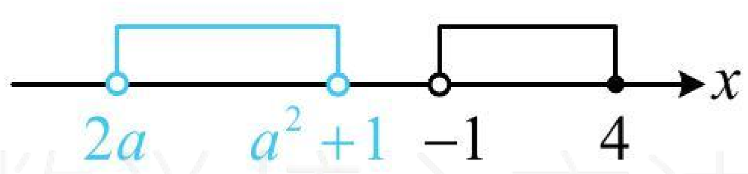


图1

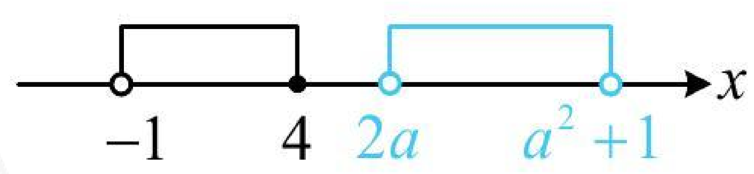


图2

19．（2023•全国模拟•★★）某班 45 名学生参加“3.12 植树节”活动，每位学生都参加除草、植树两项劳动，依据劳动表现，评定为优秀、合格两个等级，结果如下表：

项目＼等级	优秀	合格	合计
除草	30	15	45
植树	20	25	45

若在两个项目中都合格的学生最多有 10 人，则在两个项目中都优秀的人数最多为（　　）

（A）5　（B）10　（C）15　（D）20

答案：C

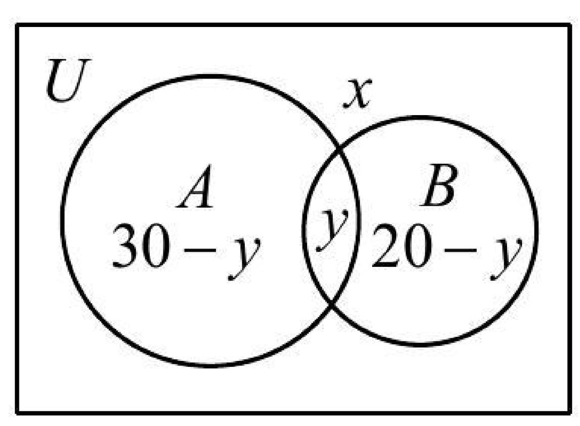
解析：涉及两个项目两个等级，关系较复杂，故考虑画图分析，

设除草优秀的学生构成集合 A，植树优秀的学生构成集合 B，设都合格和都优秀的人数分别为 x，y，

我们已知的是 $x\le 10$，故只需建立 x 和 y 的关系，就能求出 y 的范围，可由总人数为 45 来建立，

如图，$(20-y)+y+(30-y)+x=45$，所以 $y=x+5$，因为 $x\le 10$，所以 $y\le 15$，当且仅当 $x=10$ 时取等号，

故两个项目中都优秀的人数最多为 15.



20．（2023·重庆模拟·★★）某班有 40 名同学参加数学、物理、化学课外研究小组，每名同学至多参加两个小组. 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26，15，13，同时参加数学和化学小组的有 6 人，同时参加物理和化学小组的有 4 人，则同时参加数学和物理小组的人数为_____.

答案：4

解析：涉及三个小组，且彼此的人员有重叠，关系较复杂，故考虑画图分析，

如图，设同时参加数学和物理小组的人数为 x，则只参加数学、物理小组的分别有 $20-x$ 人，$11-x$ 人，要求 x，可由总人数为 40 来建立方程并求解，由题意，$(20-x)+(11-x)+x+6+4+3=40$，解得：$x=4$.